数理解析研究所講究録
第1669巻 2009年 81-90

The class of harmonic functions with finite Drichlet integral and the harmonic Hardy spaces on a hyperbolic Riemann surface

京都産業大学 正岡 弘照
(Kyoto Sangyo University) (Hiroaki Masaoka)

1. 導入

R を Riemann面とし, $HP_+(R)$, $HB_+(R)$, $HD_+(R)$ および $MHB_+(R)$ をそれぞれ, R上の非負値調和関数の族, R上の非負値有界調和関数の族, R上のDrichlet積分が有限な非負値調和関数の族, およびR上の$HB_+(R)$の要素からなる単調増大列の有限な極限値関数の族とする. $HX(R) := HX_+(R) - HX_+(R) = \{h_1 - h_2 \mid h_j \in HX_+(R)\ (j=1,2)\ \}$ $(X = P, B, D)$, $MHB(R) := MHB_+(R) - MHB_+(R)$ とおく. このとき, $HB(R)$ は R上の有界調和関数の族であり, $HD(R)$ は R上のDrichlet積分が有限な調和関数の族である. また, $MHB(R)$ は R上の擬有界(*quasi-bounded*)調和関数の族と呼ばれている.

Green関数をもたない開リーマン面の族を O_G で表し, O_G の要素を放物型リーマン面と言い, そうでない場合は, 双曲型リーマン面と言う. このとき, 以下の事実が知られている.

事実

$$R \in O_G \Rightarrow HP(R) = HB(R) = HD(R) = MHB(R) = \mathbb{R} \quad \text{(cf. [8])}.$$

上の事実より, 以下の議論では, $R \notin O_G$を仮定することにする. また, 今後の議論において, $z_0(\in R)$ を固定しておく.

Rの *Martin*境界及び *minimal Martin*境界をそれぞれ, $\Delta := \Delta^{R,M}$ 及び$\Delta_1 := \Delta_1^{R,M}$ で表し, $z \in R$ に関する Δ 上の 調和測度を $\omega_z(\cdot)$ で表すことにする. Martin境界についての詳細は[1]を参照する.

R上の指数pのHardy空間を$h_p(R)$ $(1 \le p \le \infty)$で表わす(次節でHardy空間の定義は与える). 次の包含関係はよく知られている.

$$\boxed{\begin{array}{lcr} h_\infty(R) \subset \cdots \subset h_q(R) \subset h_p(R) \cdots \subset MHB(R) \subset & h_1(R) \\ \parallel & \parallel \\ HB(R) & HP(R) \\ & (1 \le p < q) \end{array}}$$

そこで, この包含関係の逆はいつ成立するかという問題が自然に提出される. これについては以下の解答が得られている.

定理 A (cf.[3])

$R \notin O_G$ および $1 < p < q \le \infty$ を仮定する. このとき,

(i) $h_p(R) = h_q(R)$,

$\Longleftrightarrow$ (ii) ある$N(\subset \Delta)$が 存在して,

$$\begin{cases} \omega_{z_0}(N) = 0, \\ \sharp(\Delta_1 \setminus N) < +\infty, \\ \omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0 \quad (\forall \zeta \in \Delta_1 \setminus N). \end{cases}$$

がなりたつ.

$h_\infty(R) = HB(R)$ および $HD(R)$ の間にはいかなる包含関係もないが, $HB(R) = HD(R)$ がなりたつための必要十分条件に興味がある. これについては, 以下がなりたつ.

定理 B (cf. [4])

$R \notin O_G$ を仮定する. このとき,

(i) $HB(R) = HD(R)$ すなわち, $h_\infty(R) = HD(R)$,

$\Longleftrightarrow$ (ii) ある $N(\subset \Delta)$ が存在して,

$$\begin{cases} \omega_{z_0}(N) = 0, \\ \sharp(\Delta_1 \setminus N) < +\infty, \\ \omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0 \ (\forall \zeta \in \Delta_1 \setminus N), \\ z \mapsto \omega_z(\{\zeta\}) \in HD(R) \ \ (\forall \zeta \in \Delta_1 \setminus N) \end{cases}$$

がなりたつ.

定理Bから, 次の問題が自然に提出される.

問題

$h_p(R) = HD(R)$ $(p > 1)$ が なりたつための必要十分条件を求めよ.

この問題に対して, 次の部分的な解答が得られたので, 報告する.

主定理

$R \notin O_G, 1 < p \leq \infty$ および $p \neq 2$ を仮定する. このとき,

(i) $HD(R) = h_p(R)$,

$\Longleftrightarrow$ (ii) ある $N(\subset \Delta)$ が 存在して,

$$\begin{cases} \omega_{z_0}(N) = 0, \\ \sharp(\Delta_1 \setminus N) < +\infty, \\ \omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0 \ (\forall \zeta \in \Delta_1 \setminus N), \\ z \mapsto \omega_z(\{\zeta\}) \in HD(R) \end{cases}$$

が なりたつ.

2. 準備

この節では, 1節で与えた主定理を証明するための準備を行う.

$z \in R$ に関する Δ 上の 調和測度を $\omega_z(\cdot)$ で表わす.

定義 (cf. [3, 定義 in p.437 and 定理 4])

$p \geq 1$ とし,

$$h_p(R) = \begin{cases} \{u \mid R\text{上}, \Delta u = 0 \text{かつ, ある } h(\in HP_+(R)) \\ \qquad \text{が存在して}, R \text{ 上}, |u|^p \leq h \text{がなりたつ}\}, & (1 \leq p < \infty), \\ HB(R), & (p = \infty) \end{cases}$$

とおく.

$h_p(R)$ を R 上の指数 p をもつ<u>調和 *Hardy* 空間</u>という.

次の事実が知られている.

$$\begin{cases} \boxed{h_1(R) = HP(R).} \\ \boxed{1 \leq p < q \leq \infty \Rightarrow h_q(R) \subset h_p(R).} \end{cases}$$

次の命題は $h_p(R)$ の Martin 境界の言葉を用いた特徴付けを与える.

命題 1 (cf. [6, p.437 の定義, 定理 4 および 定理6])

$1 < p < \infty$ とする. このとき,

(i) $u \in h_p(R)$,

$\Longleftrightarrow$ (ii) u が ω_{z_0} に関してほとんどすべての点$\zeta(\in \Delta_1)$で, the minimal fine limit $u^*(\zeta)$ をもち, 以下の性質をみたす.

$$\begin{cases} u(z) = \int_{\Delta_1} u^*(\zeta) d\omega_z(\zeta), \\ \int_{\Delta_1} |u^*(\zeta)|^p d\omega_{z_0}(\zeta) < \infty. \end{cases}$$

$u(\in HP(R))$ に対して, 以下を定義する.
$||u||_{h_p(R)} := \left(\int_\Delta |u^*|^p d\omega_{z_0}\right)^{1/p}$.
$D(u) := \int_R [(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2] dxdy$.
$||u||_{HD(R)} := |u(z_0)| + D(u)^{1/2}$.

命題 2

$p > 1$とする. このとき,

(i) $h_p(R) = HD(R)$,

$\Longleftrightarrow$ (ii) ある正の定数cおよびCが存在して,

$$c||u||_{h_p(R)} \leq ||u||_{HD(R)} \leq C||u||_{h_p(R)} \quad (\forall u \in h_p(R) \cup HD(R))$$

をみたす.

命題2の証明

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明は容易である.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明

$h_p(R)$ および $h_p(R) \cap HD(R)$ は それぞれ, $||\cdot||_{h_p(R)}$ および $||\cdot||_{HD(R)} + ||\cdot||_{h_p(R)}$ をノルムとするBanach空間である. $F : h_p(R) \cap HD(R) \to h_p(R)$ を $F(u) = u$ $(u \in h_p(R) \cap HD(R))$ で定義する. 明らかに, $||u||_{h_p(R)} \leq ||u||_{HD(R)} + ||u||_{h_p(R)}$ が なりたち, F が 連続である. 開写像定理より, F^{-1} が 連続であり, ある $\alpha\ (> 1)$ が 存在して,

$$||u||_{HD(R)} + ||u||_{h_p(R)} \leq \alpha ||u||_{h_p(R)},$$

すなわち,

$$||u||_{HD(R)} \leq (\alpha - 1)||u||_{h_p(R)} \ (u \in h_p(R) \cap HD(R)) \quad (\sharp)$$

が なりたつ.

$G : h_p(R) \cap HD(R) \to HD(R)$ を $G(u) = u$ $(u \in h_p(R) \cap HD(R))$ で定義する. 不等式$(\sharp)$を求めたと同様の方法を用いると, ある $\beta\ (> 0)$ が 存在して,

$$||u||_{h_p(R)} \leq \beta ||u||_{HD(R)} \ (u \in h_p(R) \cap HD(R)) \quad (\sharp\sharp)$$

がなりたつ. (i) より, $h_p(R) \cap HD(R) = h_p(R) \cup HD(R)$ であるので, $(\sharp)$および$(\sharp\sharp)$より, 所求の結果を得る.

命題2より, $h_p(R) = HD(R)$ がなりたつとき, 以下の不等式を得る.

$$c||u||_{h_p(R)} - u(z_0) \leq D(u)^{1/2} \leq C||u||_{h_p(R)} \quad (\forall u \in h_p(R) \cup HD(R)).$$

この不等式で, $u(z) = \omega_z(E)$ (Eは Δ の Borel 集合) とおくと, 次の命題を得る.

命題 3

$p > 1$ とし, $h_p(R) = HD(R)$ を仮定する. このとき, ある c' および C' が存在して, $\omega_{z_0}(E) < (c/2)^{\frac{p}{p-1}}$ (c は 命題2における c である) をみたす任意のBorel 集合 $E(\subset \Delta)$ に対して,

$$c'\ \omega_{z_0}(E)^{2/p} \leq D(\omega_\cdot(E)) \leq C'\ \omega_{z_0}(E)^{2/p}$$

がなりたつ.

$\Delta \times \Delta$ 上の Naïm 核(cf. [7]) を $\theta(\xi, \zeta)$ で表わす. 次の命題は $HD(R)$ の Martin 境界の言葉を用いた特徴付けを与える.

命題 4 (cf. [2])

次の条件 (i) および (ii) は同値である.

(i) $u \in HD(R)$.

(ii) u が ω_{z_0} に関してほとんどすべての点$\zeta(\in \Delta_1)$で, the minimal fine limit $u^*(\zeta)$ をもち,

$$\begin{cases} u(z) = \int_{\Delta_1} u^*(\zeta) d\omega_z(\zeta), \\ \int_{\Delta_1} u^*(\zeta)^2 d\omega_{z_0}(\zeta) < \infty, \\ \int_{\Delta_1}\int_{\Delta_1} (u^*(\xi) - u^*(\zeta))^2 \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta) < \infty \end{cases}$$

がなりたつ.

さらに, このとき,

$$D(u) = c_0 \int_{\Delta_1}\int_{\Delta_1} (u^*(\xi) - u^*(\zeta))^2 \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta)$$

がなりたつ. ここで, c_0 は絶対定数である.

3. 主定理の証明

$p = \infty$ の場合は 定理Bより, したがう. よって, $1 < p < \infty$ ($p \neq 2$) の場合を考察する.

<u>(i) $\Rightarrow$ (ii) の証明</u>

<u>$1 < p < 2$の場合</u>

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \Longleftrightarrow & h_p(R) = HD(R) \\ & \Longrightarrow & h_p(R) = h_2(R) \longleftarrow h_p(R) \supset h_2(R) \supset HD(R) \\ & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{定理}A}}{\Longrightarrow} & \exists N(\subset \Delta) \text{ s.t.} \begin{cases} \omega_{z_0}(N) = 0, \\ \sharp(\Delta_1 \setminus N) < +\infty, \\ \omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0\ (\forall \zeta \in \Delta_1 \setminus N), \\ z \mapsto \omega_z(\{\zeta\}) \in HD(R) \longleftarrow \text{(i)} \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \text{(ii)} \end{array}$$

<u>$p > 2$の場合</u>

次の3段階に分けて, 証明を行う.

第1段階: $\zeta(\in \Delta)$ とする. このとき, 次がなりたつ.

$$\omega_{z_0}(U_\rho(\zeta)) > 0\ (\forall \rho > 0) \Rightarrow \omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0$$

($U_\rho(\zeta) := \{\xi(\in R \cup \Delta | \ d(\xi,\zeta) < \rho\}$, ここで, $d(\cdot,\cdot)$ は $R \cup \Delta$ 上の標準的な距離である).

第2段階: ある$N(\subset \Delta)$が存在して, 次をみたす.

$$\begin{cases} \omega_{z_0}(N) = 0, \\ \sharp(\Delta_1 \setminus N) \le \aleph_0, \\ \omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0 \ (\forall \zeta \in \Delta_1 \setminus N), \\ z \mapsto \omega_z(\{\zeta\}) \in HD(R) \ (\forall \zeta \in \Delta_1 \setminus N). \end{cases}$$

第3段階: $\sharp(\Delta_1 \setminus N) < +\infty$.

第1段階の証明

ある $\zeta(\in \Delta)$ が存在して,

$$\omega_{z_0}(U_\rho(\zeta)) > 0 \ (\forall \rho > 0) \text{ かつ } \omega_{z_0}(\{\zeta\}) = 0$$

を仮定すると, ある $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して,

$$\begin{cases} \rho_n \searrow 0 \ (n \to \infty), \\ \omega_{z_0}(U_{\rho_n}(\zeta)) \le \dfrac{1}{e+1} \ \omega_{z_0}(U_{\rho_{n-1}}(\zeta)) \ (n \in \mathbb{N}) \\ (\text{すなわち, } \omega_{z_0}(U_{\rho_n}(\zeta)) \le e^{-1} \ \omega_{z_0}(U_{\rho_{n-1}}(\zeta) \setminus U_{\rho_n}(\zeta)) \ (n \in \mathbb{N})) \end{cases}$$

がなりたつ. このとき,

$$\exists f \in h_p(R) \setminus HD(R) \cdots\cdots \ (*)$$

がなりたつ. これは (1) に矛盾する.

(*)の証明

q を $1 < q < \frac{\min(p,e)}{2}$ をみたすようにとる. $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方より, $\omega_{z_0}(U_{\rho_n}(\zeta) \setminus U_{\rho_{n+1}}(\zeta)) > 0 \ (n \in \mathbb{N})$ に注意する. $f^*(\xi)$ および $f(z)$ を以下のようにおく.

$$f^*(\xi) := \begin{cases} [n^q \omega_{z_0}(U_{\rho_n}(\zeta) \setminus U_{\rho_{n+1}}(\zeta))]^{-1/p}, & (\xi \in U_{\rho_n}(\zeta) \setminus U_{\rho_{n+1}}(\zeta)), \\ 0, & (\xi \in \Delta \setminus U_{\rho_1}(\zeta)). \end{cases}$$

$$f(z) := \int_{\Delta_1} f^*(\xi) d\omega_z(\xi).$$

fの特性

(1) f が ω_{z_0} に関してほとんどすべての点$\xi(\in \Delta_1)$で, the minimal fine limit $f^*(\xi)$ をもつ.
(2) $\int_{\Delta_1} f^*(\xi)^p d\omega_{z_0}(\xi) < \infty$.
(3) $||f||_{HD(R)} = \infty$.

上を示すと, 命題1より, $f \in h_p(R) \setminus HD(R)$ がわかる.

(1)の証明

Fatouの定理より, したがう.

(2)の証明

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_1} f^*(\xi)^p d\omega_{z_0}(\xi) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} [n^q \omega_{z_0}(U_{\rho_n}(\zeta) \setminus U_{\rho_{n+1}}(\zeta))]^{-1} \omega_{z_0}(U_{\rho_n}(\zeta) \setminus U_{\rho_{n+1}}(\zeta)) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^q < \infty. \end{aligned}$$

したがって, $f \in h_p(R)$.

(3)の証明

$V_n = U_{\rho_n}(\zeta) \setminus U_{\rho_{n+1}}(\zeta) \ (n \in \mathbb{N})$ および $V_0 = R \setminus U_{\rho_1}(\zeta)$ とおく. $\nu_0(\in \mathbb{N})$ を $\omega_{z_0}(V_n) < (c/2)^{\frac{p}{p-1}} (n \ge \nu_0)$ をみたすものとする. ここで, c は 命題2における c である.

まず, q を $1 < q < \frac{\min(p,e)}{2}$ とするとき, 次の評価がなりたつ.

$$([n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{1}{p}} - [m^q\omega_{z_0}(V_m)]^{-\frac{1}{p}})^2 \geq C[n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-2/p}\ (m \neq n)\ \cdots(\flat),$$

ここで, C は m および n によらない定数である.

<u>($\flat$)の証明</u>

(1) $n > m$のとき

$$\begin{aligned}
n^q\omega_{z_0}(V_n) &\leq n^q e^{m-n}\omega_{z_0}(V_m) \longleftarrow \rho_n \text{ の定義より}, \omega_{z_0}(V_n) \leq e^{-1}\omega_{z_0}(V_{n-1}) \\
&= [\tfrac{n}{m(n-m)}]^q \tfrac{(n-m)^q}{e^{n-m}} m^q\omega_{z_0}(V_m) \\
&\leq \left(\tfrac{1}{(n-m)} + \tfrac{1}{m}\right)^q \tfrac{q^q}{e^q} m^q\omega_{z_0}(V_m) \longleftarrow \tfrac{x^q}{e^x} \leq \tfrac{q^q}{e^q}\ (x > 0) \\
&\leq (1+1)^q \tfrac{q^q}{e^q} m^q\omega_{z_0}(V_m) \\
&\leq \left(\tfrac{2q}{e}\right)^q m^q\omega_{z_0}(V_m)
\end{aligned}$$

よって,

$$n^q\omega_{z_0}(V_n) \leq \left(\tfrac{2q}{e}\right)^q m^q\omega_{z_0}(V_m) \cdots (\natural)$$

を得る.

$$\begin{aligned}
&([n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{1}{p}} - [m^q\omega_{z_0}(V_m)]^{-\frac{1}{p}})^2 \\
=\ & [n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{2}{p}} \left(1 - \left[\tfrac{n^q\omega_{z_0}(V_n)}{m^q\omega_{z_0}(V_m)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^2 \\
\geq\ & [n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{2}{p}} \left(1 - \left(\tfrac{2q}{e}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^2 \longleftarrow (\natural)
\end{aligned}$$

(2) $m > n$のとき

($\natural$) を求めた同様の方法により,

$$m^q\omega_{z_0}(V_m) \leq \left(\tfrac{2q}{e}\right)^q n^q\omega_{z_0}(V_n) \cdots (\natural')$$

を得る.

$$\begin{aligned}
&([n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{1}{p}} - [m^q\omega_{z_0}(V_m)]^{-\frac{1}{p}})^2 \\
=\ & [m^q\omega_{z_0}(V_m)]^{-\frac{2}{p}} \left(1 - \left[\tfrac{m^q\omega_{z_0}(V_m)}{n^q\omega_{z_0}(V_n)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^2 \\
\geq\ & [\left(\tfrac{2q}{e}\right)^q n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{2}{p}} \left(1 - \left(\tfrac{2q}{e}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^2 \longleftarrow (\natural') \\
=\ & [n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{2}{p}} \left(\tfrac{2q}{e}\right)^{-\frac{2q}{p}} \left(1 - \left(\tfrac{2q}{e}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^2 \\
\geq\ & [n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{2}{p}} \left(1 - \left(\tfrac{2q}{e}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^2
\end{aligned}$$

以上より, $C = \left(1 - \left(\frac{2q}{e}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^2$ とおくことによって, 求める評価式を得る.

$$\begin{aligned}
&(1/c_0)D(f) \\
=\ & \int_\Delta\int_\Delta (f^*(\xi) - f^*(\zeta))^2\theta(\xi,\zeta)d\omega_{z_0}(\xi)d\omega_{z_0}(\zeta) \longleftarrow \text{命題4} \\
=\ & \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty}\int_{V_n}\int_{V_m}((f^*(\xi) - f^*(\zeta))^2\theta(\xi,\zeta)d\omega_{z_0}(\xi)d\omega_{z_0}(\zeta) \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}\int_{V_n}\int_{V_m}([n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{1}{p}} - [m^q\omega_{z_0}(V_m)]^{-\frac{1}{p}})^2\theta(\xi,\zeta)d\omega_{z_0}(\xi)d\omega_{z_0}(\zeta) \\
& \qquad + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{V_n}\int_{V_0}[n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-\frac{2}{p}}\theta(\xi,\zeta)d\omega_{z_0}(\xi)d\omega_{z_0}(\zeta) \\
\geq\ & C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty}\int_{V_n}\int_{V_m}[n^q\omega_{z_0}(V_n)]^{-2/p}\theta(\xi,\zeta)d\omega_{z_0}(\xi)d\omega_{z_0}(\zeta) \longleftarrow (\flat)
\end{aligned}$$

$$\geq \quad C' \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2q/p}[\omega_{z_0}(V_n)]^{-2/p} \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq n}}^{\infty} \int_{V_n}\int_{V_m} \theta(\xi,\zeta)d\omega_{z_0}(\xi)d\omega_{z_0}(\zeta)$$

$$\geq \quad C'' \sum_{n=\nu_0}^{\infty} n^{-2q/p}[\omega_{z_0}(V_n)]^{-2/p}[\omega_{z_0}(V_n)]^{2/p} \quad \longleftarrow \quad D(\omega.(V_n)) = 2\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq n}}^{\infty} \int_{V_n}\int_{V_m} \theta(\xi,\zeta)d\omega_{z_0}(\xi)d\omega_{z_0}(\zeta)$$

および命題3

$$= \quad C'' \sum_{n=\nu_0}^{\infty} n^{-2q/p} = \infty,$$

ここで, C' および C'' は m および n によらない定数である.

したがって, $f \notin HD(R)$.

第2段階の証明

集合NおよびFを以下のようにおく.

$N := \{\zeta \in \Delta |$ ある$\rho_\zeta(>0)$ が存在して, $\omega_{z_0}(U_{\rho_\zeta}(\zeta)) = 0$がなりたつ$\}$.

$F := \Delta \setminus N$.

このとき, 以下がなりたつ.

(1) $F \cup N = \Delta, F \cap N = \emptyset \longleftarrow F$ および Nの定義

(2) $\omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0\ (\forall \zeta \in F) \longleftarrow$ 第1段階

(3) $z \mapsto \omega_z(\{\zeta\}) \in HD(R)\ (\forall \zeta \in F) \longleftarrow$ (i)

(4) $\sharp F \leq \aleph_0 \quad \longleftarrow$ (2) および $\omega_{z_0}(\Delta) = 1$

(5) $F \subset \Delta_1 \quad \longleftarrow$ (2) および $\omega_{z_0}(\Delta \setminus \Delta_1) = 0$

(6) $\omega_{z_0}(N) = 0$.

(6)の証明

$O := \cup_{\zeta \in N} U_{\rho_\zeta}(\zeta)$ とおく. 明らかに, O は $R \cup \Delta$の開集合であり, $O \cap \Delta = N$ をみたす. Lindelöf の定理より, ある$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}(\subset N)$ が 存在して, $O = \cup_{n=1}^{\infty} U_{\rho_{\xi_n}}(\xi_n)$ をみたす. したがって,

$\omega_{z_0}(N) \leq \omega_{z_0}(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{z_0}(U_{\rho_{\xi_n}}(\xi_n)) = 0$. よって, $\omega_{z_0}(N) = 0$.

第3段階の証明

$\sharp(\Delta_1 \setminus N) = \aleph_0$ を仮定する.

$\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n, \cdots$ を $\Delta_1 \setminus N$ の要素とする. $\omega_{z_0}(\cup_{n=1}^{\infty}\{\zeta_n\}) = 1$であるので,

ある $\{\zeta_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}(\subset \{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty})$ が 存在して,

$$\omega_{z_0}(\{\zeta_k\}_{k=n_l}^{\infty}) \leq \frac{1}{e+1}\omega_{z_0}(\{\zeta_k\}_{k=n_{l-1}}^{\infty})$$

$$(\text{すなわち}, \omega_{z_0}(\{\zeta_k\}_{k=n_l}^{\infty}) \leq e^{-1}\omega_{z_0}(\{\zeta_k\}_{k=n_{l-1}}^{n_l-1}))$$

が なりたつ. このことと命題1から,

$$g(\in h_p(R) \setminus HD(R)) \text{ が 存在する}. \quad \cdots\cdots(\diamond)$$

これは (i)に矛盾であり, 第3段階の証明が完成する.

$(\diamond)$の証明

$V_l = \{\zeta_k\}_{k=n_l}^{n_{l+1}-1}\ (l \in \mathbb{N})$ および $V_0 = \{\zeta_k\}_{k=0}^{n_1-1}$ とおく. $\{\zeta_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ のとり方より, $\omega_{z_0}(V_l) > 0\ (l \in \mathbb{N})$ であることを注意する. q を $1 < q < \frac{\min(p,e)}{2}$ をみたすようにとる.

$g^*(\xi)$および$g(z)$を以下のようにおく.

$$g^*(\xi) := \begin{cases} [l^q \omega_{z_0}(V_l)]^{-1/p}, & (\xi \in V_l), \\ 0, & (\xi \in \Delta \setminus \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}). \end{cases}$$

$$g(z) := \int_{\Delta_1} g^*(\xi) d\omega_z(\xi).$$

g は 次の特性をもつ.

gの特性

(1) g が ω_{z_0} に関してほとんどすべての点$\xi(\in \Delta_1)$で, the minimal fine limit $g^*(\xi)$ をもつ.
(2) $\int_{\Delta_1} g^*(\xi)^p d\omega_{z_0}(\xi) < \infty$.
(3) $||g||_{HD(R)} = \infty$.

上を示すと, 命題1より, $g \in h_p(R) \setminus HD(R)$ がわかる.

(1)の証明

Fatouの定理より, したがう.

(2)の証明

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1} g^*(\xi)^p d\omega_{z_0}(\xi) &= \sum_{l=1}^{\infty} [l^q \omega_{z_0}(V_l)]^{-1} \omega_{z_0}(V_l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} l^{-q} < \infty.\end{aligned}$$

したがって, $g \in h_p(R)$.

(3)の証明

$\nu_1(\in \mathbb{N})$ を$\omega_{z_0}(V_l) < (c/2)^{\frac{p}{p-1}} (l \geq \nu_1)$ をみたすものとする. ここで, c は 命題2における c である.

まず, q を $1 < q < \frac{\min(p,e)}{2}$ とするとき, 次の評価がなりたつ.

$$([l^q \omega_{z_0}(V_l)]^{-\frac{1}{p}} - [m^q \omega_{z_0}(V_m)]^{-\frac{1}{p}})^2 \geq C[l^q \omega_{z_0}(V_l)]^{-2/p} \ (l \neq m) \ \cdots (\mathfrak{b}'),$$

ここで, C は l および m によらない定数である.

証明は fの特性(3)の証明において, 与えた$(\mathfrak{b})$の証明と同じであるので, 省略する.

$$\begin{aligned}
&(1/c_0)D(g) \\
= \ & \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_1} (g^*(\xi) - g^*(\zeta))^2 \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta) \longleftarrow \text{命題4} \\
= \ & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq l}}^{\infty} \int_{V_l} \int_{V_m} ((g^*(\xi) - g^*(\zeta))^2 \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) \omega_{z_0}(\zeta) \\
= \ & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq l}}^{\infty} ([l^q \omega_{z_0}(V_l)]^{-\frac{1}{p}} - [m^q \omega_{z_0}(V_m)]^{-\frac{1}{p}})^2 \int_{V_l} \int_{V_m} \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta) \\
& \qquad + 2\sum_{l=1}^{\infty} [l^q \omega_{z_0}(V_l)]^{-\frac{1}{p}} \int_{V_l} \int_{V_0} \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta) \\
\geq \ & C \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq l}}^{\infty} [l^q \omega_{z_0}(V_l)]^{-2/p} \int_{V_l} \int_{V_m} \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta) \longleftarrow (\mathfrak{b}') \\
\geq \ & C' \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2q/p} [\omega_{z_0}(V_l)]^{-2/p} \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq l}}^{\infty} \int_{V_l} \int_{V_m} \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta) \\
\geq \ & C'' \sum_{l=\nu_1}^{\infty} l^{-2q/p} [\omega_{z_0}(V_l)]^{-2/p} [\omega_{z_0}(V_l)]^{2/p} \longleftarrow D(\omega_\cdot(V_l)) = 2\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq l}}^{\infty} \int_{V_l} \int_{V_m} \theta(\xi,\zeta) d\omega_{z_0}(\xi) d\omega_{z_0}(\zeta)
\end{aligned}$$

および命題3

$$= \quad C'' \sum_{l=\nu_1}^{\infty} l^{-2q/p} = \infty,$$

ここで, C' および C'' は l および m によらない定数である.

したがって, $g \notin HD(R)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) の証明

ある $N(\subset \Delta)$ が存在して,

$$\begin{cases} \omega_{z_0}(N) = 0, \\ \sharp(\Delta_1 \setminus N) < +\infty, \\ \omega_{z_0}(\{\zeta\}) > 0 \ (\forall\zeta \in \Delta_1 \setminus N), \\ z \mapsto \omega_z(\{\zeta\}) \in HD(R) \qquad (\forall\zeta \in \Delta_1 \setminus N) \end{cases}$$

をみたすと仮定する.

$\mu_0 = \sharp(\Delta_1 \setminus N)$ とおき, $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{\mu_0}$ を $\Delta_1 \setminus N$ の要素とする.

$$h \in h_p(R) \text{ (resp. } HD(R)).$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{命題1} \\ \text{(resp. 命題4)}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} h \text{ が } \omega_{z_0} \text{ に関してほとんどすべての点 } \zeta(\in \Delta_1) \text{ で, the minimal fine limit } h^*(\xi) \text{ をもつ}, \\ h(z) = \int_{\Delta_1} h^*(\xi) d\omega_z(\xi), \\ \int_{\Delta_1} |h^*(\xi)|^p d\omega_{z_0}(\xi) < \infty \text{ (resp. } \int_{\Delta_1} h^*(\xi)^2 d\omega_{z_0}(\xi) < \infty). \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Delta_1 \setminus N = \{\zeta_j\}_{j=1}^{\mu_0} \\ \omega_{z_0}(N) = 0}}{\Longrightarrow} \begin{cases} h(z) = \sum_{n=1}^{\mu_0} h^*(\zeta_n) \omega_z(\{\zeta_n\}), \\ |h^*(\zeta_n)| < \infty \ (n = 1, \ldots, \mu_0). \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \omega_z(\zeta_j) \in HD(R) \ (j = 1, \cdots, \mu_0) \\ \text{(resp. } \omega_z(\zeta_j) \in h_p(R) \ (j = 1, \cdots, \mu_0))}}{\Longrightarrow} \quad h \in HD(R) \text{ (resp. } h \in h_p(R)).$$

$$\Longrightarrow \quad h_p(R) \subset HD(R) \text{ (resp. } h_p(R) \supset HD(R)).$$

$$\Longrightarrow \quad h_p(R) = HD(R).$$

$$\Longrightarrow \quad \text{(i)}.$$

文献

[1] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder Riemanncher Flächen*, Springer, 1969.

[2] J. L. Doob, *Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals*, Ann. Inst. Fourier, **12**(1962), 573–621.

[3] H. Masaoka, *When do the harmonic Hardy spaces with distinct indices coincide on a hyperbolic Riemann surfaces?*, Acta humanistica et scientifica universitatis Sangio Kyotiensis, **44**(2008), pp.1–9.

[4] H. Masaoka, *The classes of bounded harmonic functions and harmonic functions with finite Dirichlet integrals on hyperbolic Riemann surfaces*, in preparation.

[5] H. Masaoka and M. Nakai, *The classes of bounded harmonic functions and harmonic functions with finite Dirichlet integrals on hyperbolic Riemann surfaces*, in preparation.

[6] L. Naïm, *$\mathcal{H}^p$-spaces of harmonic functions*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **17**(1967), pp.425–469.

[7] L. NAÏM, *Sur le rôle de la frontiere de R. S. Martin dans la thèorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183–281.

[8] L. SARIO AND M. NAKAI, *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

正岡弘照
京都産業大学理学部
603-8555 京都市北区上賀茂本山
e-mail masaoka@cc.kyoto-su.ac.jp